Elágazó folyamatok aggregációja

Doktori (Ph.D.) értekezés tézisei

KUNOSNÉ NEDÉNYI FANNI

Témavezetők:

Dr. Pap Gyula
egyetemi tanár

és

Dr. Barczy Mátyás
tudományos főmunkatárs

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Bolyai Intézet

Szegedi Tudományegyetem, Természettudományi és Informatikai Kar

Szeged, 2020

1. Bevezetés

Az értekezésben bizonyos elágazó folyamatok (centrált és skálázott) térbeli és időbeli aggregáltjainak határeloszlásaival foglalkozunk. Jól ismert, hogy az aggregáltaknak, más néven részletösszegeknek különösen fontos szerepe van a sztochasztikában. A dolgozat mindegyik fejezete ezzel a kérdéssel foglalkozik különböző folyamatok, konvergencia-típus (iterált vagy szimultán), illetve centrálás esetében.

Az első fejezet az értekezés bevezetője, ahol felvázoljuk a dolgozat célját, a kutatott téma előzményeit, valamint a disszertáció felépítését. A következő bekezdésben részletesebben bemutatjuk az általunk alkalmazott aggregációt.

Az aggregáció célja, hogy kapcsolatot teremtsen az egyéni (mikro) és az összesített (makro) viselkedés között. Mi minden esetben egy stacionárius elágazó folyamat független kópiáiból fogunk kiindulni, jelölje ezeket $(X_k^{(j)})_{k\in\mathbb{N}}$, $j \in \mathbb{N}$, ahol $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$. Azt vizsgáljuk, hogyan viselkedik a megfelelően centrált és skálázott aggregált folyamat, $\left(\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{\lfloor nt\rfloor} X_k^{(j)}\right)_{t\in[0,\infty)}$, amint n, az idő paramétere, valamint N, a kópiák száma valamilyen módon végtelenhez tart. Amennyiben iterált módon tekintjük a határérték-képzést, azaz először n tart végtelenhez, majd N, vagy fordítva, akkor a kapott határeloszlás-tételt iteráltnak nevezzük. Amennyiben a két paraméter egyszerre konvergál végtelenhez, akkor a tételt szimultánnak nevezzük. Ahhoz, hogy ilyen határeloszlás-tételeket lássunk be, vizsgáljuk a következő egyszeres aggregáltakat is: $\sum_{k=1}^{n} X_k^{(j)}$, melyet időbeli, illetve $\sum_{j=1}^{N} X_k^{(j)}$, melyet térbeli aggregáltnak nevezünk.

A továbbiakban felelevenítjük az értekezés legfontosabb előzményeit. Az elsőrendű autoregressziós (AR(1)) folyamatok térbeli aggregációját először a Nobel-díjas Clive W. J. Granger [5] vizsgálta azzal a céllal, hogy hosszú memóriát váltson ki aggregált idősorok esetében. Donatas Surgailis és szerzőtársai cikksorozatukban véletlen együtthatójú AR(1) folyamatok aggregációját tanulmányozták, ahol $(X_k^{(j)})_{k\in\mathbb{Z}_+:=\{0,1,\dots\}}$, $j \in \mathbb{N}$, a következő stacionárius véletlen együtthatójú AR(1) folyamat független kópiái:

$$X_k = aX_{k-1} + \varepsilon_k, \qquad k \in \mathbb{N},$$

standardizált, független és azonos eloszlású $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bevándorlással, ahol a $(0, 1)$ értékkészletű a véletlen együttható független az $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozattól, és

$$\psi(x)(1 - x)^\beta, \qquad x \in (0, 1),$$

a sűrűségfüggvénye, ahol $\beta \in (-1, \infty)$ és ψ olyan integrálható függvény a $(0,1)$ intervallumon, melyre $\lim_{x\uparrow 1}\psi(x) := \psi_1 \in (0,\infty)$. Pilipauskaitė és Surgailis [7] cikkükben a $\left(\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{\lfloor nt\rfloor} X_k^{(j)}\right)_{t\in[0,\infty)}$ aggregált folyamathoz tartozó iterált és szimultán határeloszlás-tételeket adtak meg.

Célunk, hogy hasonló eredményeket írjunk le abban az esetben, amikor a véletlen együtthatójú AR(1) modellek helyét elágazó folyamatok veszik át. Ezen folyamatok széles körben alkalmazhatóak egészértékű jelenségek, mint a migráció, vagy fertőző betegségek (például COVID-19) modellezése. Részletesebben leírjuk ezt a két lehetséges alkalmazást a dolgozat második fejezetében.

2. Bevándorlásos, többtípusos Galton–Watson elágazó folyamatok aggregáltjainak határeloszlás-tételei

A dolgozat második fejezetében többtípusos bevándorlásos Galton–Watson folyamatok aggregáltjaival foglalkozunk. A második fejezet bizonyításainak alapja a Barczy et al. [1] cikk.

A p-dimenziós ($p \in \mathbb{N}$) folyamat, $(\boldsymbol{Y}_k = [Y_{k,1},\ldots,Y_{k,p}]^\top)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ bevándorlásos p-típusos Galton–Watson elágazó folyamat, amennyiben

$$\boldsymbol{Y}_k = \sum_{\ell=1}^{Y_{k-1,1}} \begin{bmatrix} \xi_{k,\ell}^{(1,1)} \\ \vdots \\ \xi_{k,\ell}^{(1,p)} \end{bmatrix} + \cdots + \sum_{\ell=1}^{Y_{k-1,p}} \begin{bmatrix} \xi_{k,\ell}^{(p,1)} \\ \vdots \\ \xi_{k,\ell}^{(p,p)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_k^{(1)} \\ \vdots \\ \varepsilon_k^{(p)} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{\ell=1}^{Y_{k-1,i}} \boldsymbol{\xi}_{k,\ell}^{(i)} + \boldsymbol{\varepsilon}_k$$

minden $k \in \mathbb{N}$ esetén, ahol $\sum_{\ell=1}^{0} := \boldsymbol{0}$ és $\big\{\boldsymbol{Y}_0, \boldsymbol{\xi}_{k,\ell}^{(i)}, \boldsymbol{\varepsilon}_k : k,\ell \in \mathbb{N}, i \in \{1,\ldots,p\}\big\}$ független $\mathbb{Z}_+^p$-értékű véletlen vektorok. Továbbá minden $i \in \{1,\ldots,p\}$ esetén mind $\{\boldsymbol{\xi}^{(i)}, \boldsymbol{\xi}_{k,\ell}^{(i)} : k,\ell \in \mathbb{N}\}$, mind $\{\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_k : k \in \mathbb{N}\}$ azonos eloszlású vektorokból áll. Feltesszük, hogy

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{\xi}^{(i)}) \in \mathbb{R}_+^p, \quad i \in \{1,\ldots,p\}, \qquad \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \in \mathbb{R}_+^p \setminus \{\boldsymbol{0}\},$$
$$\varrho(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\xi}}) < 1, \qquad \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\xi}} \text{ primitív},$$

ahol $\mathbb{R}_+ := [0,\infty)$, $\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\varepsilon}} := \mathbb{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) \in \mathbb{R}_+^p$, $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\xi}} := \mathbb{E}\big(\big[\boldsymbol{\xi}^{(1)},\ldots,\boldsymbol{\xi}^{(p)}\big]\big) \in \mathbb{R}_+^{p\times p}$ és $\varrho(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\xi}})$ jelöli az $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\xi}}$ mátrix spektrálsugarát. Ekkor létezik egyértelmű stacionárius eloszlás. Ezt választjuk $\boldsymbol{Y}_0$ eloszlásának, így a tekintett folyamat erősen stacionárius. Ezen $(\boldsymbol{Y}_k^{(j)})_{k\in\mathbb{Z}_+}$, $j \in \mathbb{N}$, folyamat független kópiáit tekintjük. Minden $N, n \in \mathbb{N}$, esetén legyen $\boldsymbol{S}^{(N,n)} = (\boldsymbol{S}_t^{(N,n)})_{t\in\mathbb{R}_+}$, ahol

$$\boldsymbol{S}_t^{(N,n)} := \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} (\boldsymbol{Y}_k^{(j)} - \mathbb{E}(\boldsymbol{Y}_k^{(j)})), \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

Legyen

$$\boldsymbol{V} := (V_{i,j})_{i,j=1}^{p} := \left(\boldsymbol{v}_{(i,j)}^{\top} \begin{bmatrix} (\boldsymbol{I}_p - \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\xi}})^{-1} \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ 1 \end{bmatrix} \right)_{i,j=1}^{p} \in \mathbb{R}^{p\times p},$$

ahol $\boldsymbol{I}_p$ jelöli a p-dimenziós egységmátrixot, amennyiben a

$$\boldsymbol{v}_{(i,j)} := \left[\operatorname{Cov}(\xi^{(1,i)}, \xi^{(1,j)}), \dots, \operatorname{Cov}(\xi^{(p,i)}, \xi^{(p,j)}), \operatorname{Cov}(\varepsilon^{(i)}, \varepsilon^{(j)}) \right]^{\top} \in \mathbb{R}^{(p+1)\times 1}$$

kovarianciák minden $i, j \in \{1, \dots, p\}$, esetén végesek. A következőkben leírjuk a dolgozat második fejezetének legfontosabb eredményeit. Megjegyezzük, hogy a $\mathcal{D}_{\mathrm{f}}$-lim jelölés a véges dimenziós eloszlások konvergenciáját jelöli.

2.1. Tétel. *Amennyiben a* $\boldsymbol{\xi}^{(i)}$, $i \in \{1, \dots, p\}$, *és* $\boldsymbol{\varepsilon}$ *vektorok komponenseinek véges a második momentuma, akkor*

$$\mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{n\to\infty} \mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{N\to\infty} (nN)^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{S}^{(N,n)} = (\boldsymbol{I}_p - \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\xi}})^{-1} \boldsymbol{V}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{B},$$

ahol $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{B}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *egy* p*-dimenziós standard Brown-mozgás.*

Amennyiben a $\boldsymbol{\xi}^{(i)}$, $i \in \{1, \dots, p\}$, *és* $\boldsymbol{\varepsilon}$ *vektorok komponenseinek véges a harmadik momentuma, akkor*

$$\mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{N\to\infty} \mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{n\to\infty} (nN)^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{S}^{(N,n)} = (\boldsymbol{I}_p - \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\xi}})^{-1} \boldsymbol{V}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{B},$$

ahol $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{B}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *egy* p*-dimenziós standard Brown-mozgás.*

2.2. Tétel. *Amennyiben a* $\boldsymbol{\xi}^{(i)}$, $i \in \{1, \dots, p\}$, *és* $\boldsymbol{\varepsilon}$ *vektorok komponenseinek véges a harmadik momentuma, akkor*

$$(nN)^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{S}^{(N,n)} \xrightarrow{\mathcal{D}} (\boldsymbol{I}_p - \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\xi}})^{-1} \boldsymbol{V}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{B},$$

amennyiben n *and* N *tetszőleges rátával végtelenbe tartanak, ahol* $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{B}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *egy* p*-dimenziós standard Brown-mozgás.*

Ezen tételek bizonyításának alapja a többdimenziós centrális határeloszlás-tétel és a funkcionális martingál centrális határeloszlás-tétel.

Több speciális esetben is tárgyaljuk az eredményeket, köztük Poisson bevándorlású, elsőrendű egészértékű autoregressziós (INAR(1)) folyamatokra. Ezek olyan bevándorlásos egydimenziós Galton–Watson folyamatok, melyek esetében az utódeloszlások Bernoulli eloszlásúak $\alpha \in (0, 1)$ paraméterrel, a bevándorlások pedig Poisson eloszlásúak.

3. Poisson bevándorlású, véletlenített INAR(1) folyamatok aggregáltjainak iterált határeloszlás-tételei

A harmadik és negyedik fejezetben olyan $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ véletlenített, α ritkítási paraméterrel rendelkező, véletlenített INAR(1) folyamatokat vizsgálunk, melyekre

$$X_k = \sum_{\ell=1}^{X_{k-1}} \xi_{k,\ell} + \varepsilon_k = \alpha \circ X_{k-1} + \varepsilon_k, \qquad k \in \mathbb{N},$$

ahol $\circ$ az úgynevezett Steutel and van Harn ritkítási operátor, α egy valószínűségi változó $(0,1)$-beli értékekkel, X_0 pedig egy megfelelő valószínűségi változó. Ez azt jelenti, hogy az α változóra feltételesen az $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ folyamat egy α ritkítási paraméterű INAR(1) folyamat, azaz α-ra feltételesen a $(\xi_{k,\ell})_{k,\ell\in\mathbb{N}}$ utódeloszlások Bernoulli eloszlásúak α paraméterrel. Szintén α-ra feltételesen a független $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bevándorlások Poisson eloszlásúak $\lambda \in (0,\infty)$ paraméterrel, az X_0 kezdeti érték feltételes eloszlása pedig az egyértelmű stacionárius eloszlás, mely egy Poisson eloszlás $\lambda/(1-\alpha)$ paraméterrel. A harmadik fejezetben precízen belátjuk, hogy ilyen folyamat létezik. A célként kitűzött iterált és szimultán határeloszlás-tételekhez feltesszük, hogy az α véletlen együttható abszolút folytonos

$$\psi(x)(1-x)^\beta, \qquad x \in (0,1),$$

sűrűségfüggvénnyel, ahol ψ olyan függvény a $(0,1)$ intervallumon, melyre $\lim_{x\uparrow 1}\psi(x) = \psi_1 \in (0,\infty)$. Jegyezzük meg, hogy $\beta \in (-1,\infty)$ (másképp $\int_0^1 \psi(x)(1-x)^\beta \,\mathrm{d}x = \infty$), és a $(0,1) \ni x \mapsto \psi(x)$ függvény $(0,1)$-en integrálható. A Béta-eloszlás speciális esete ennek az alaknak. Katasztrófa modellek esetén megjelennek azok a $\circ$ operátorok, ahol az összeadandók véletlen együtthatójú Bernoulli eloszlású véletlen változók Béta-eloszlású paraméterrel. Továbbá Clive W. J. Granger Béta-eloszlás négyzetgyökét alkalmazta véletlenített AR(1) folyamatok paraméterének véletlenítésére.

A harmadik fejezetben az aggregáltakhoz tartozó, többféle módon tekintett iterált határeloszlástételeket prezentálunk. A harmadik fejezet bizonyításainak alapja a Nedényi és Pap [6], valamint a Barczy et al. [3] cikk.

Három, a centrálás tekintetében különböző aggregált folyamattal foglalkozunk: $\widetilde{S}^{(N,n)} := (\widetilde{S}_t^{(N,n)})_{t\in\mathbb{R}_+}$, $S^{(N,n)} := (S_t^{(N,n)})_{t\in\mathbb{R}_+}$, valamint $\widehat{S}^{(N,n)} :=$

$(\widehat{S}_t^{(N,n)})_{t\in\mathbb{R}_+}$ minden $N, n \in \mathbb{N}$ esetén, továbbá

$$\widetilde{S}_t^{(N,n)} := \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} (X_k^{(j)} - \mathbb{E}(X_k^{(j)} | \alpha^{(j)})),$$

ahol az adott folyamathoz tartozó véletlenített paraméterre vett feltételes várható értékkel centrálunk,

$$S_t^{(N,n)} := \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} (X_k^{(j)} - \mathbb{E}(X_k^{(j)})),$$

ahol a várható értékkel centrálunk (mely csak $\beta > 0$ esetén létezik), valamint

$$\widehat{S}_t^{(N,n)} := \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \left(X_k^{(j)} - \frac{\sum_{\ell=1}^{n} X_\ell^{(j)}}{n} \right),$$

ahol az első n megfigyelés átlagával centrálunk, hogy egy jól alkalmazható, megfigyelhető alternatívát kapjunk. Mivel az iterált határeloszlás-tételeknek két típusa van ($n \to \infty$, majd $N \to \infty$, vagy fordítva), és különböző határeloszlás-tételeket kapunk β különböző értékeire, így számos tétel szerepel a fejezetben. Ezek listája teljes.

A következő négy eredmény a megfelelően skálázott $\widetilde{S}^{(N,n)}$ folyamat határértékét vizsgálja, amint először $N \to \infty$, majd $n \to \infty$, amennyiben $\beta \in (-1, 1]$.

3.1. Tétel. *Amennyiben* $\beta \in (-1, 0)$, *akkor*

$$\mathcal{D}_\mathrm{f}\text{-}\lim_{n\to\infty} \mathcal{D}_\mathrm{f}\text{-}\lim_{N\to\infty} n^{-1} N^{-\frac{1}{2(1+\beta)}} \widetilde{S}^{(N,n)} = (V_{2(1+\beta)} t)_{t\in\mathbb{R}_+},$$

ahol $V_{2(1+\beta)}$ *egy szimmetrikus* $2(1+\beta)$*-stabilis valószínűségi változó (mely* t*-től nem függ), a következő karakterisztikus függvénnyel:*

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta V_{2(1+\beta)}}) = \mathrm{e}^{-K_\beta |\theta|^{2(1+\beta)}}, \qquad \theta \in \mathbb{R},$$

ahol

$$K_\beta := \psi_1 \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{1+\beta} \frac{\Gamma(-\beta)}{1+\beta}.$$

3.2. Tétel. *Amennyiben* $\beta = 0$, *akkor*

$$\mathcal{D}_\mathrm{f}\text{-}\lim_{n\to\infty} \mathcal{D}_\mathrm{f}\text{-}\lim_{N\to\infty} n^{-1} (N \log N)^{-\frac{1}{2}} \widetilde{S}^{(N,n)} = (W_{\lambda\psi_1} t)_{t\in\mathbb{R}_+},$$

ahol $W_{\lambda\psi_1}$ *standard normális eloszlású véletlen változó 0 várható értékkel és* $\lambda\psi_1$ *varianciával.*

A 3.1 és 3.2 Tételek bizonyításának alapja egy lemma, melyet ehhez a kutatáshoz dolgoztunk ki. Bizonyos alakú karakterisztikus függvények konvergenciájára ad elégséges feltételeket.

Minden $\beta \in (0,2)$ esetén legyen $(\mathcal{B}_{1-\frac{\beta}{2}}(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ frakcionális Brown-mozgás $1-\beta/2$ paraméterrel, ami egy olyan Gauss-folyamat, mely 0 várható értékű és kovariancia-függvénye

$$\operatorname{Cov}(\mathcal{B}_{1-\frac{\beta}{2}}(t_1), \mathcal{B}_{1-\frac{\beta}{2}}(t_2)) = \frac{t_1^{2-\beta} + t_2^{2-\beta} - |t_2 - t_1|^{2-\beta}}{2}, \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+.$$

3.3. Tétel. *Amennyiben* $\beta \in (0,1)$, *akkor*

$$\mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{n\to\infty} \mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{N\to\infty} n^{-1+\frac{\beta}{2}} N^{-\frac{1}{2}} \widetilde{S}^{(N,n)} = \sqrt{\frac{2\lambda\psi_1\Gamma(\beta)}{(2-\beta)(1-\beta)}} \mathcal{B}_{1-\frac{\beta}{2}}.$$

A 3.3 Tétel bizonyítása során Beran et al. [4] 4.3. Tételét alkalmazzuk, mely standard normális eloszlású véletlen változók stacionárius sorozatának Hermite-függvényének részletösszeg-sorozatának konvergenciájáról szól.

3.4. Tétel. *Amennyiben* $\beta = 1$, *akkor*

$$\mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{n\to\infty} \mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{N\to\infty} (n\log n)^{-\frac{1}{2}} N^{-\frac{1}{2}} \widetilde{S}^{(N,n)} = \sqrt{2\lambda\psi_1} B,$$

ahol $B = (B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *standard Wiener-folyamat.*

A 3.4 Tétel bizonyítása során azt alkalmazzuk, hogy 0 várható értékű Gauss-folyamatok eloszlásbeli konvergenciájának ellenőrzésekor elegendő a kovariancia-függvények konvergenciáját belátni.

A következő két határeloszlás-tétel az $\widetilde{S}^{(N,n)}$ folyamatra vonatkozik, amikor először $n \to \infty$, majd $N \to \infty$, és $\beta \in (-1,1]$.

3.5. Tétel. *Amennyiben* $\beta \in (-1,1)$, *akkor*

$$\mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{N\to\infty} \mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{n\to\infty} N^{-\frac{1}{1+\beta}} n^{-\frac{1}{2}} \widetilde{S}^{(N,n)} = \mathcal{Y}_{1+\beta},$$

ahol $\mathcal{Y}_{1+\beta} = \big(\mathcal{Y}_{1+\beta}(t) := \sqrt{Y_{(1+\beta)/2}}\, B_t\big)_{t\in\mathbb{R}_+}$, *és* $Y_{(1+\beta)/2}$ *egy pozitív* $\frac{1+\beta}{2}$*-stabilis valószínűségi változó, melynek* $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\theta Y_{(1+\beta)/2}}) = \mathrm{e}^{-k_\beta \theta^{\frac{1+\beta}{2}}}$, $\theta \in \mathbb{R}_+$, *a Laplace-transzformáltja, ahol*

$$k_\beta := \frac{(2\lambda)^{\frac{1+\beta}{2}}\psi_1}{1+\beta}\Gamma\left(\frac{1-\beta}{2}\right),$$

és $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *egy független standard Wiener-folyamat. Az* $\mathcal{Y}_{1+\beta}$ *folyamat stacionárius növekményű és egydimenziós eloszlásai* $(1+\beta)$*-stabilisak.*

A 3.5 Tétel bizonyításának alapja az a korábban említett lemma, melyet a 3.1 és 3.2 Tételek bizonyítása során is alkalmaztunk.

3.6. Tétel. *Amennyiben* $\beta = 1$, *akkor*

$$\mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{N\to\infty} \mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{2}}(N\log N)^{-\frac{1}{2}}\, \widetilde{S}^{(N,n)} = \sqrt{\lambda\psi_1} B,$$

ahol $B = (B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *standard Wiener-folyamat.*

A 3.6 Tétel bizonyítása során Resnick [8] 7.1. Tételét alkalmazzuk. Ez az eredmény háromszög-rendszerek részletösszeg-sorozatának Lévy-folyamatokhoz való gyenge konvergenciájáról szól.

A következő eredmény egy iterált határeloszlás-tétel $\beta \in (1, \infty)$ esetén, ahol az iteráció sorrendje tetszőleges. Ezzel a tétellel az $\widetilde{S}^{(N,n)}$ aggregált folyamatra vonatkozó iterált határeloszlás-tételek sora teljes.

3.7. Tétel. *Amennyiben* $\beta \in (1, \infty)$, *akkor*

$$\mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{n\to\infty} \mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{N\to\infty} (nN)^{-\frac{1}{2}}\widetilde{S}^{(N,n)} = \mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{N\to\infty} \mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{n\to\infty} (nN)^{-\frac{1}{2}}\widetilde{S}^{(N,n)} = \sigma B,$$

ahol $\sigma^2 := \lambda\,\mathbb{E}((1+\alpha)(1-\alpha)^{-2})$ *és* $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *standard Wiener-folyamat.*

Megjegyezzük, hogy $\beta > 1$ esetén a σ paraméter véges.

A 3.7 Tétel bizonyítása során ismét azt alkalmazzuk, hogy 0 várható értékű Gauss-folyamatok eloszlásbeli konvergenciájának ellenőrzésekor elegendő a kovariancia-függvények konvergenciáját belátni, valamint felhasználjuk a többdimenziós centrális határeloszlás-tételt.

A továbbiakban az $S^{(N,n)}$ aggregált folyamatra vonatkozó határeloszlás-tételeket prezentáljuk. Ezen tételek a korábbi 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 és 3.7 Tételek megfelelői. Megjegyezzük, hogy $\mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}\big(\frac{\lambda}{1-\alpha}\big)$ pontosan akkor véges, ha $\beta > 0$. Így a 3.1 és 3.2 Tételeknek nincsenek erre a folyamatra vonatkozó megfelelői.

3.8. Tétel. *Amennyiben* $\beta \in (0, 1)$, *akkor*

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{n\to\infty} \mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{N\to\infty} n^{-1}N^{-\frac{1}{1+\beta}} S^{(N,n)} &= \mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{N\to\infty} \mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{n\to\infty} n^{-1}N^{-\frac{1}{1+\beta}} S^{(N,n)}\\ &= \big(Z_{1+\beta}\, t\big)_{t\in\mathbb{R}_+},\end{aligned}$$

ahol $Z_{1+\beta}$ *egy* $(1+\beta)$*-stabilis valószínűségi változó, melynek karakterisztikus függvénye* $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta Z_{1+\beta}}) = \mathrm{e}^{-|\theta|^{1+\beta}\omega_\beta(\theta)}$, $\theta \in \mathbb{R}$, *ahol*

$$\omega_\beta(\theta) := \frac{\psi_1\Gamma(1-\beta)\lambda^{1+\beta}}{-\beta(1+\beta)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\,\mathrm{sign}(\theta)(1+\beta)/2}, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

A következő tétel az értekezéshez lett kidolgozva, egyik cikkünkben sem jelent meg.

3.9. Tétel. *Amennyiben* $\beta = 1$, *akkor létezik egy* $(a_N)_{N\in\mathbb{N}}$ *sorozat, melyre* $\sqrt{N}/a_N = \mathrm{o}(1)$ *amint* $N \to \infty$ *(azaz* $\lim_{N\to\infty} \sqrt{N}/a_N = 0$*), és*

$$\mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{n\to\infty} \mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{N\to\infty} n^{-1} a_N^{-1} S^{(N,n)} = \mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{N\to\infty} \mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{n\to\infty} n^{-1} a_N^{-1} S^{(N,n)} = (W\, t)_{t\in\mathbb{R}_+},$$

ahol W *standard normális eloszlású valószínűségi változó.*

3.10. Tétel. *Amennyiben* $\beta \in (1, \infty)$, *akkor*

$$\mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{n\to\infty} \mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{N\to\infty} n^{-1} N^{-\frac{1}{2}} S^{(N,n)} = \mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{N\to\infty} \mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{n\to\infty} n^{-1} N^{-\frac{1}{2}} S^{(N,n)} = (W_{\lambda^2 \operatorname{Var}((1-\alpha)^{-1})}\, t)_{t\in\mathbb{R}_+},$$

ahol $W_{\lambda^2 \operatorname{Var}((1-\alpha)^{-1})}$ *normális eloszlású valószínűségi változó 0 várható értékkel és* $\lambda^2 \operatorname{Var}((1-\alpha)^{-1})$ *varianciával.*

A 3.8, 3.9 és 3.10 Tételek bizonyítása során azt mutatjuk meg, hogy bizonyos valószínűségi változók egy stabilis, illetve normális eloszlású véletlen változó vonzási tartományában vannak. Megjegyezzük, hogy a 3.1, 3.2, 3.8, 3.9 és 3.10 Tételek esetében a határfolyamatok véletlen meredekségű egyenesek.

Végül az $\widehat{S}^{(N,n)}$ aggregált folyamathoz tartozó határeloszlás-tételek következnek. Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}
\widehat{S}_t^{(N,n)} &= \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{\lfloor nt\rfloor} \left[X_k^{(j)} - \mathbb{E}(X_k^{(j)} \mid \alpha^{(j)}) - \frac{\sum_{\ell=1}^{n} (X_\ell^{(j)} - \mathbb{E}(X_\ell^{(j)} \mid \alpha^{(j)}))}{n} \right] \\
&= \widetilde{S}_t^{(N,n)} - \frac{\lfloor nt\rfloor}{n} \widetilde{S}_1^{(N,n)}
\end{aligned}$$

minden $t \in \mathbb{R}_+$ esetén. Így a 3.3, 3.5, 3.4, 3.6, és 3.7 Tételek alapján, Slutsky lemmáját felhasználja következnek az $\widehat{S}^{(N,n)}$ aggregált folyamathoz tartozó határeloszlás-tételek. Megjegyezzük, hogy a $\beta = 1$ esethez tartozó eredmény korábban nem került publikálásra.

3.11. Következmény. *Amennyiben* $\beta \in (0, 1)$, *akkor*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{n\to\infty} \mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{N\to\infty} n^{-1+\frac{\beta}{2}} N^{-\frac{1}{2}}\, \widehat{S}^{(N,n)} \\
&\quad = \sqrt{\frac{2\lambda\psi_1\Gamma(\beta)}{(2-\beta)(1-\beta)}} \Big(\mathcal{B}_{1-\frac{\beta}{2}}(t) - t\mathcal{B}_{1-\frac{\beta}{2}}(1)\Big)_{t\in\mathbb{R}_+},
\end{aligned}$$

ahol a $\mathcal{B}_{1-\frac{\beta}{2}}$ *Gauss-folyamatot a 3.3 Tétel előtt definiáltuk.*

Amennyiben $\beta \in (-1,1)$, *akkor*

$$\mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{N\to\infty} \mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{n\to\infty} N^{-\frac{1}{1+\beta}} n^{-\frac{1}{2}} \widehat{S}^{(N,n)} = (\mathcal{Y}_{1+\beta}(t) - t\mathcal{Y}_{1+\beta}(1))_{t\in\mathbb{R}_+},$$

ahol $\mathcal{Y}_{1+\beta}$ *a 3.5 Tételben lett megadva.*

Amennyiben $\beta = 1$, *akkor*

$$\mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{n\to\infty} \mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{N\to\infty} (n\log n)^{-\frac{1}{2}} N^{-\frac{1}{2}} \widehat{S}^{(N,n)} = \sqrt{2\lambda\psi_1}(B_t - tB_1)_{t\in\mathbb{R}_+},$$

továbbá

$$\mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{N\to\infty} \mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{2}} (N\log N)^{-\frac{1}{2}} \widehat{S}^{(N,n)} = \sqrt{\lambda\psi_1}(B_t - tB_1)_{t\in\mathbb{R}_+},$$

ahol $B = (B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *standard Wiener-folyamat.*

Amennyiben $\beta \in (1,\infty)$, *akkor*

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{n\to\infty} \mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{N\to\infty} (nN)^{-\frac{1}{2}} \widehat{S}^{(N,n)} &= \mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{N\to\infty} \mathcal{D}_{\mathrm{f}}\text{-}\lim_{n\to\infty} (nN)^{-\frac{1}{2}} \widehat{S}^{(N,n)} \\ &= \sigma(B_t - tB_1)_{t\in\mathbb{R}_+},\end{aligned}$$

ahol σ^2 *a 3.7 Tételben lett megadva, és* $B = (B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *standard Wiener-folyamat.*

A 3.11 Következményben a határfolyamatok a $[0,1]$ intervallumon híd-folyamatok abban az értelemben, hogy ugyanazt az értéket (0) veszik fel a 0 és 1 időpontokban. Speciálisan $\beta \in (1,\infty)$ esetén Wiener-híd jelenik meg. Megjegyezzük, hogy a többi tételnek nincs megfelelője az $\widehat{S}^{(N,n)}$ folyamatra vonatkozóan, ugyanis ezekben az esetekben a határfolyamatok véletlen meredekségű egyenesek, melyek esetén a konstans 0 folyamatot kapnánk eredményül. Kisebb súlyozás mellett elképzelhető, hogy $\beta \in (-1,0]$ esetén is elérhető lenne nem degenerált határfolyamat, amikor először $N \to \infty$, majd $n \to \infty$.

Összefoglalva a fejezet eredményeit megjegyezzük, hogy annál inkább súlyozzuk a folyamatokat, minél kisebb a β paraméter. Ennek oka, hogy a véletlenített INAR(1) folyamat stacionárius eloszlásának első és második momentumának létezése ezen paraméter értékétől függ. További érdekesség, hogy a különböző sorrendű iterálás során igen különbözőek a kapott tételek is: sok esetben mind a skálázás, mind a határfolyamat más.

4. Poisson bevándorlású, véletlenített INAR(1) folyamatok aggregáltjainak szimultán határeloszlás-tételei

A negyedik fejezetben két szimultán határeloszlás-tétel szerepel. A negyedik fejezet bizonyításainak alapja a Barczy et al. [2] cikk, mely benyújtásra került egy folyóirathoz.

Az iterált határeloszlás-tételekkel szemben ezek listája nem teljes, a kimaradt eseteket jövőbeli kutatásunk során szeretnénk kezelni. A következőkben a két szimultán határeloszlás-tételt mutatjuk be. Az N paraméter helyett N_n, $n \in \mathbb{N}$, sorozattal fogunk dolgozni, hogy reprezentáljuk a két paraméter közötti kapcsolatot. Az eredményeket $n \to \infty$ esetén mondjuk ki, mely mindkét esetben magával vonja, hogy a N_n, $n \in \mathbb{N}$, sorozat is végtelenhez tart, amint $n \to \infty$.

4.1. Tétel. *Amennyiben* $\beta \in (-1, 0)$, *akkor*

$$n^{-1} N_n^{-\frac{1}{2(1+\beta)}} \, \widetilde{S}^{(N_n,n)} \xrightarrow{\mathcal{D}_{\mathrm{f}}} (V_{2(1+\beta)} t)_{t \in \mathbb{R}_+}$$

amint $n \to \infty$ *és* $N_n^{\frac{-\beta}{1+\beta}} n^{-1} \to \infty$, *ahol* $V_{2(1+\beta)}$ *egy szimmetrikus* $2(1+\beta)$*-stabilis valószínűségi változó (mely* t*-től nem függ), a következő karakterisztikus függvénnyel:*

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta V_{2(1+\beta)}}) = \mathrm{e}^{-K_\beta |\theta|^{2(1+\beta)}}, \qquad \theta \in \mathbb{R},$$

ahol

$$K_\beta := \psi_1 \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{1+\beta} \frac{\Gamma(-\beta)}{1+\beta}.$$

A 4.1 Tételt tekinthetjük a 3.1 Tétel megfelelőjének. A skálázó sorozat és határfolyamat is egybeesik a két esetben.

4.2. Tétel. *Amennyiben* $\beta = 0$, *akkor*

$$n^{-1} (N_n \log N_n)^{-\frac{1}{2}} \, \widetilde{S}^{(N_n,n)} \xrightarrow{\mathcal{D}_{\mathrm{f}}} (W_{\lambda\psi_1} t)_{t \in \mathbb{R}_+}$$

amint $n \to \infty$ *és* $(\log N_n)^2 n^{-1} \to \infty$, *ahol* $W_{\lambda\psi_1}$ *standard normális eloszlású véletlen változó 0 várható értékkel és* $\lambda\psi_1$ *varianciával.*

A 4.2 Tételt tekinthetjük a 3.2 Tétel megfelelőjének. A skálázó sorozat és határfolyamat is egybeesik a két esetben.

A két tétel bizonyításának alapja az a lemma, melyet az iterált tételeknél felhasznált lemma mintájára dolgoztunk ki. A jövőben más bizonyítási technikával szeretnénk kezelni a fennmaradó eseteket.

Hivatkozások

[1] M. Barczy, F. K. Nedényi, and G. Pap. On aggregation of multitype Galton-Watson branching processes with immigration. *Mod. Stoch. Theory Appl.*, 5(1):53–79, 2018.

[2] M. Barczy, F. K. Nedényi, and G. Pap. On simultaneous limits for aggregation of stationary randomized INAR(1) processes with Poisson innovations. arXiv: 2001.07127, 2020.

[3] M. Barczy, F. Nedényi, and G. Pap. Iterated limits for aggregation of randomized INAR(1) processes with Poisson innovations. *J. Math. Anal. Appl.*, 451(1):524–543, 2017.

[4] J. Beran, Y. Feng, S. Ghosh, and R. Kulik. *Long-memory processes. Probabilistic properties and statistical methods.* Springer, Heidelberg, 2013.

[5] C. W. J. Granger. Long memory relationships and the aggregation of dynamic models. *J. Econometrics*, 14(2):227–238, 1980.

[6] F. Nedényi and G. Pap. Iterated scaling limits for aggregation of random coefficient AR(1) and INAR(1) processes. *Statist. Probab. Lett.*, 118:16–23, 2016.

[7] V. Pilipauskaitė and D. Surgailis. Joint temporal and contemporaneous aggregation of random-coefficient AR(1) processes. *Stochastic Process. Appl.*, 124(2):1011–1035, 2014.

[8] S. I. Resnick. *Heavy-tail phenomena.* Springer, New York, 2007.